Programação Linear (PL) - Definições

A ***solução*** de um problema de PL é um vector de $\mathbb{R}^n$ que representa o valor das variáveis.

Uma solução que satisfaça todas as restrições (funcionais e de sinal) designa-se por ***Solução Admissível*** (SA). Uma ***Solução*** diz-se ***Não Admissível*** (SNA) se não verifica pelo menos uma das restrições.

O conjunto de todas as soluções admissíveis designa-se por ***Região Admissível*** (RA).

Solução Óptima (SO) é uma solução admissível que origina o valor mais favorável para a função objectivo (FO).

Designam-se por ***soluções óptimas alternativas*** as diferentes soluções óptimas de um mesmo problema, caso existam.

Valor Óptimo (Z^*) é o valor da função objectivo numa solução óptima.

Modelo de PL (exemplo protótipo)

$i = 1, 2, \ldots, m$ recursos ou outras imposições do modelo (fábricas)

$j = 1, 2, \ldots, n$ actividades (produtos)

x_j nível da actividade j (unidades a produzir)

Z medida da performance total (lucro)

Parâmetros do Modelo:

c_j ($j = 1, 2, \ldots, n$) coeficientes da FO (lucro unitário associado ao produto j)

b_i ($i = 1, 2, \ldots, m$) 2º membro ou termo independente (capacidade disponível da fábrica i)

a_{ij} ($j = 1, 2, \ldots, n$; $i = 1, 2, \ldots, m$) coeficiente técnico (capacidade gasta da fábrica i por cada unidade a fabricar do produto j)

Forma Standard:

$$Z^* = Max\ Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \qquad \text{função objectivo (FO)}$$

s.a:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j \le b_i & i = 1, \ldots, m & \text{restrições funcionais} \\ x_j \ge 0 & j = 1, \ldots, n & \text{restrições de sinal} \end{cases}$$

Hipóteses da PL

(H1) Proporcionalidade (num contexto de análise de actividades): $\cancel{x_j^2}$

A contribuição de cada actividade (j) para o valor da função objectivo Z é proporcional ao nível da actividade ($c_j x_j$).

A contribuição de cada actividade para o primeiro membro de cada restrição funcional é proporcional ao nível da actividade ($a_{ij} x_j$).

(H2) Aditividade (num contexto de análise de actividades): $\cancel{x_j x_k}$

Num modelo de PL cada função é a soma das contribuições individuais das respectivas actividades.

(H3) Divisibilidade: $\forall j,\ x_j \in \mathbb{R}$.

(H4) Certeza: Num modelo de PL todos os parâmetros são constantes conhecidas.

Propriedades da PL

Propriedade 1: A região admissível de um problema de PL ou é um conjunto vazio ou é um conjunto convexo.

Propriedade 2: Se a região admissível de um problema de PL é não vazia e limitada, então existe solução óptima.

Propriedade 3: Se um problema de PL tem óptimo, então pelo menos um dos pontos extremos da região admissível é solução óptima.

Propriedade 4: Dado um problema de PL com óptimo, se um ponto extremo da região admissível não tem pontos extremos adjacentes com melhor valor para a função objectivo, então esse ponto extremo é solução óptima.